

Das Bertrand'sche Paradoxon

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

8. März 2003

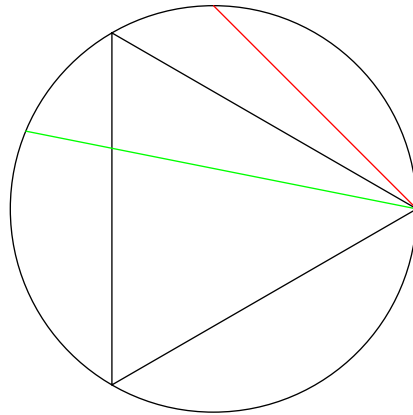


Abbildung 1.1: Skizze zur ersten Antwort

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Kreissehne größer ist als die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks? So einfach diese Frage klingen mag, so kompliziert ist ihre Antwort. Denn es gibt keine eindeutige Antwort, wie die folgenden Überlegungen zeigen werden.

Erste Antwort

Eine Kreissehne ist eindeutig durch ihre beiden Punkte auf der Kreislinie festgelegt. Für die Länge der Sehne ist nur die relative Position des zweiten Punktes zum ersten wichtig.

Hält man einen Punkt der Sehne fest, variiert den zweiten und zeichnet das eingeschriebene Dreieck in der angegebenen Weise ein, so erhält man unter der Voraussetzung, dass die Sehnen über den Winkel mit der Kreislinie gleichverteilt sind, sofort $p = 1/3$.

Zweite Antwort

Eine Kreissehne ist eindeutig durch ihren Mittelpunkt festgelegt. Alle Sehnen, die länger als die Seiten des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks sind, haben ihren Mittelpunkt in einem Kreis vom halben Radius des betrachteten Kreises.

Sind die Kreissehnenmittelpunkte über der Kreisfläche gleichverteilt, so erhält man $p = 1/4$.

Dritte Antwort

Alle Kreissehnenmittelpunkte, deren Sehnen länger sind als die Seiten des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, liegen nicht weiter als die Hälfte des Kreisradius vom Kreismittelpunkt entfernt. Sind die Sehnenmittelpunkte über dem Radius gleichverteilt, so ist $p = 1/2$.

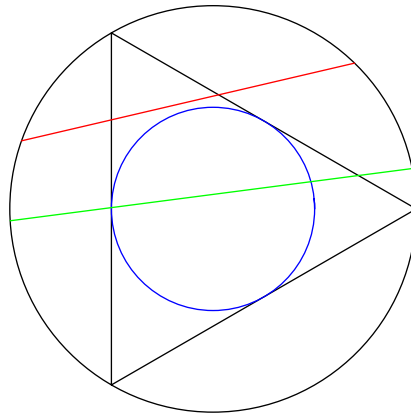


Abbildung 1.2: Skizze zur zweiten Antwort

Die Lösung

Dieses Konglomerat aus verschiedenen Antworten wurden zur Zeit Bertrands (der Gründerzeit der Stochastik) als Paradoxon angesehen. Zu seiner Zeit wurde es als selbstverständlich angesehen, dass es eine „natürliche“ Lösung geben musste. Heute wissen wir, dass die Antwort davon abhängt, wie man „zufällig gewählte Sehne“ definiert. Jede der obigen Antworten ist unter der entsprechenden Voraussetzung der genannten Gleichverteilung richtig. Aber eine „natürliche“ Antwort existiert nicht.