Conways Soldaten

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

7. August 2010

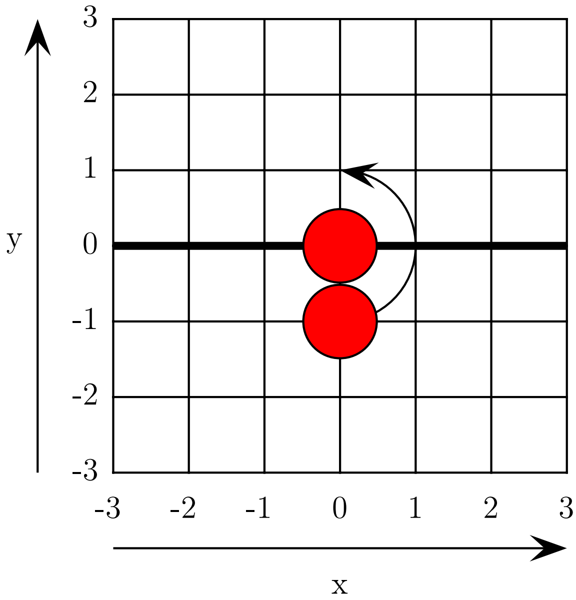
Bei Conways Soldaten handelt es sich um ein mathematisches Spiel, bei dem Spielfiguren über ein kariertes Spielfeld geführt werden. Das Ziel des Spiels ist es, so weit wie möglich hinter die Grenze ins feindliche Territorium einzudringen.

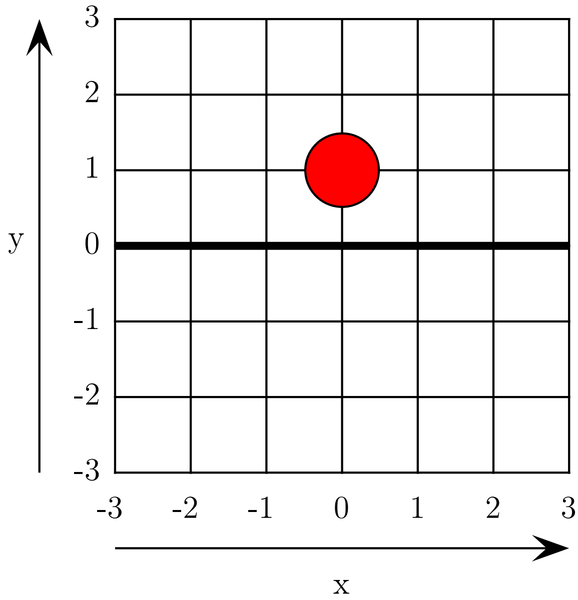
Die Spielregeln

Wir betrachten ein kariertes Spielfeld, das von zwei Achsen x und y aufgespannt wird. Die Gerade $y = 0$ teilt die Ebene in zwei Gebiete. Der Spieler kann auf die Eckpunkte der Quadrate in seiner Halbebene ($y \leq 0$) beliebig Spielfiguren (Spielstein bzw. „Soldat“) platzieren, jedoch jeweils nur eine pro Eckpunkt. Die Spielfiguren können sich nur fortbewegen, indem sie sich gegenseitig entlang der Achsen überspringen. Dabei wird die jeweils übersprungene Figur aus dem Spielfeld entfernt. Wieviele Spielfiguren benötigt man, um bis zu einer gewissen Tiefe ins gegnerische Gebiet ($y > 0$) einzudringen?

Tiefe 1

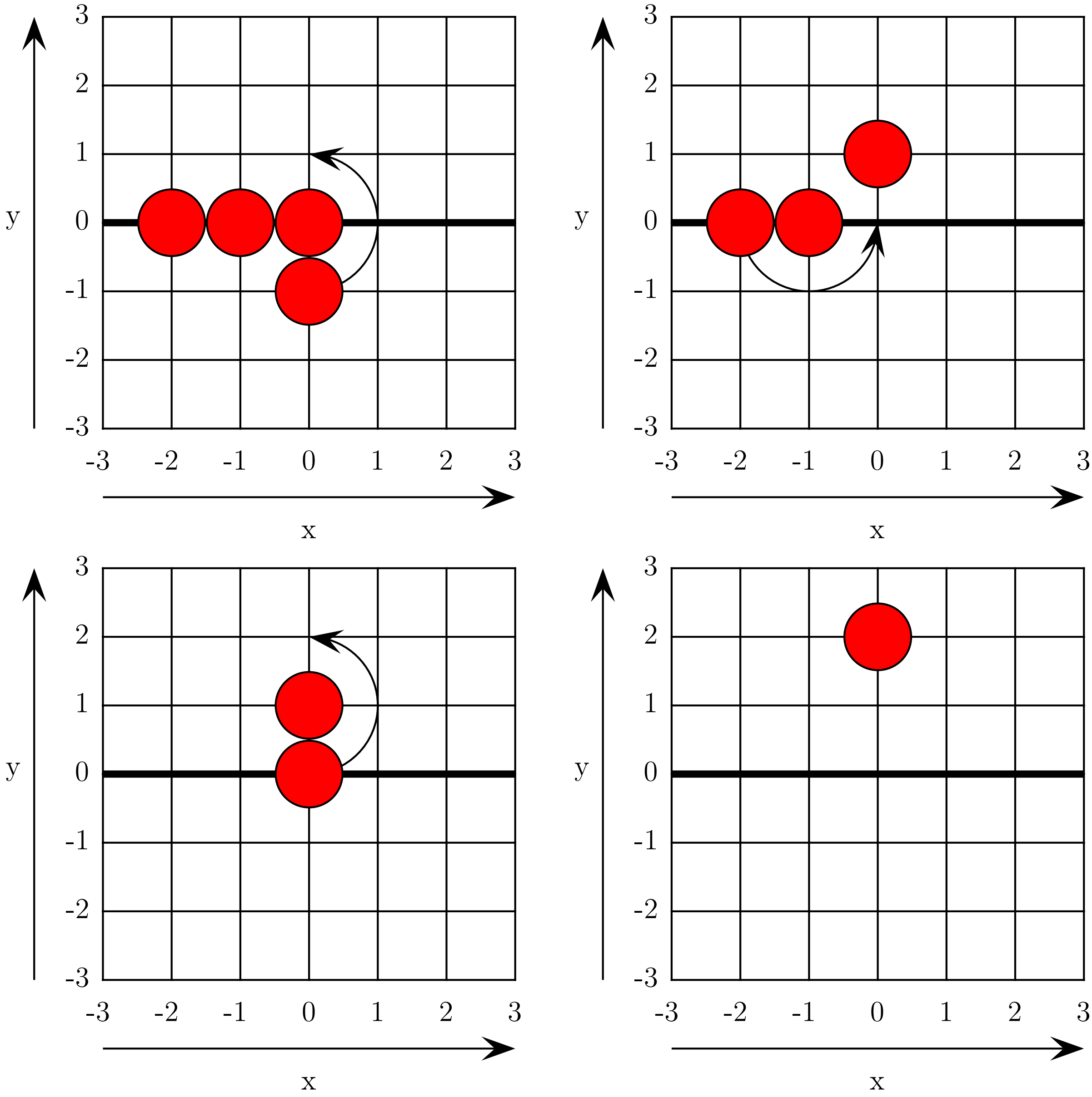
Um das Spielprinzip zu illustrieren, beginnen wir mit dem einfachsten Schritt. Wir platzieren eine Figur auf der Geraden $y = 0$ und eine weitere direkt darunter auf $y = -1$. Die zweite Figur kann die erste nun überspringen und erreicht dabei $y = 1$.





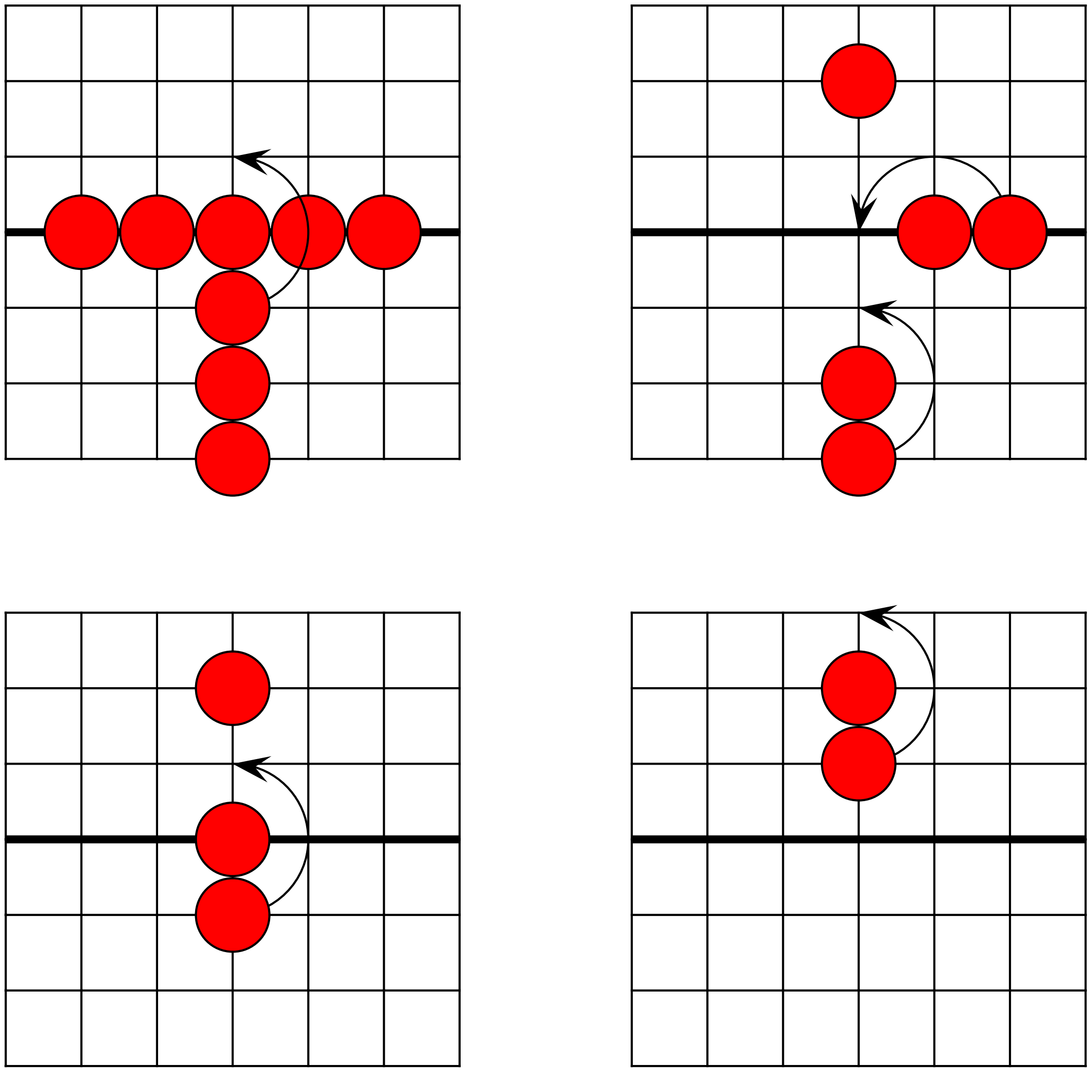
Tiefe 2

Um bis zu $y = 2$ vorzudringen, müssen wir zunächst eine Figur auf $y = 1$ bringen und diese dann mit einer weiteren Figur überspringen. Dazu sind insgesamt 4 Figuren und 3 Spielzüge nötig.



Tiefe 3 und 4

Um auf $y = 3$ und $y = 4$ vorzudringen, benötigt man immer mehr Soldaten und Spielzüge. Für $y = 3$ sind bereits 8 Spielfiguren nötig. Wir brauchen zunächst 4, um wie beschrieben auf $y = 2$ zu gelangen, und dann weitere 4, um diese Figur ein weiteres Mal zu überspringen.



Mit dem letzten Sprung ist $y = 3$ erreicht. Auch $y = 4$ ist möglich, allerdings benötigt man nun schon 20 Spielfiguren (ausprobieren!).

Tiefe 5

Obwohl es zunächst den Anschein hat, als könne man beliebig hohe y-Werte erreichen, wenn man nur genügend viele Spielfiguren zur Verfügung hat, stellt sich überraschenderweise heraus, dass es tatsächlich unmöglich ist, bis zu $y = 5$ vorzudringen. Um diese Aussage beweisen zu können, führen wir eine Bewertung der Quadratecken auf dem Spielfeld ein, um die Entfernung vom Ziel quantifizieren zu können. Der Zielpunkt bei

$y = 5$ bekommt den Wert 1, und alle benachbarten Punkte sind wachsende Potenzen einer noch zu bestimmenden positiven, reellen Zahl z in der folgenden Art und Weise.

$$\begin{array}{ccccccc} z^4 & z^3 & z^2 & z & z^2 & z^3 & z^4 \\ z^3 & z^2 & z & 1 & z & z^2 & z^3 \\ z^4 & z^3 & z^2 & z & z^2 & z^3 & z^4 \\ z^5 & z^4 & z^3 & z^2 & z^3 & z^4 & z^5 \\ z^6 & z^5 & z^4 & z^3 & z^4 & z^5 & z^6 \\ z^7 & z^6 & z^5 & z^4 & z^5 & z^6 & z^7 \end{array}$$

Dabei entspricht der Exponent der Zahl z gerade der Entfernung zum Zielpunkt in Quadratlängen. Den Wert einer bestimmten Stellung von Spielfiguren definieren wir nun als die Summe über alle Bewertungen der einzelnen Positionen. Nach einem Spielzug kann sich für die springende Spielfigur die Entfernung entweder verringern, vergrössern oder nicht ändern.

Ein typisches Beispiel für den ersten Fall (Entfernung nimmt ab) wäre etwa im Ausschnitt

$$z^n \quad z^{n+1} \quad z^{n+2}$$

eine Figur auf z^{n+1} und eine auf z^{n+2}, wobei letztere nach z^n springt. Dabei ändert sich der Wert der Stellung um

$$z^n - (z^{n+1} + z^{n+2}) = z^n(1 - z - z^2).$$

Wir wählen die Zahl z nun so, dass sich der Wert der Stellung bei einem solchen Schritt nicht ändert, dass also

$$1 - z - z^2 = 0$$

gilt. Diese quadratische Gleichung hat die positive Lösung

$$z = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

und eine negative Lösung, welche uns nicht weiter interessiert.

Ein Beispiel für den zweiten Fall (Entfernung nimmt zu) im Ausschnitt

$$z^n \quad z^{n+1} \quad z^{n+2}$$

wäre eine Besetzung von z^n und z^{n+1}, wobei die Figur von z^n nach z^{n+2} springt. Nun ändert sich der Wert der Gesamtstellung um

$$z^{n+2} - (z^n + z^{n+1}) = z^n(z^2 - 1 - z).$$

Nach unserer Wahl von z ist aber $z^2 = 1 - z$, so dass

$$z^n(z^2 - 1 - z) = z^n(-2z) < 0$$

folgt, der Wert der Stellung nimmt also ab.

Der dritte Fall (Entfernung bleibt gleich) kann nur auftreten, wenn die Figur eine Achsenparallele durch den Zielpunkt überspringt, etwa im Beispiel

$$z^{n+1} \quad z^z \quad z^{n+1}$$

vom linken z^{n+1} über z^n zum rechten z^{n+1}. Dabei ändert sich der Wert der Stellung um

$$z^{n+1} - (z^{n+1} + z^n) = z^n(z - z - 1) = -z^n < 0,$$

ist also erneut negativ. Halten wir fest: Der Wert der Stellung bleibt entweder gleich oder nimmt ab, kann aber niemals zunehmen.

Da der Zielpunkt selbst den Wert 1 hat, muss eine mögliche Stellung, die zum Erreichen des Zielpunkts führt, daher mindestens den Gesamtwert 1 haben. Wir können den Gesamtwert einer Anfangsstellung aber leicht nach oben abschätzen, indem wir über alle verfügbaren Plätze in der unteren Halbebene summieren. Da der Zielpunkt bei $y = 5$ liegt, hat der erste verfügbare Platz direkt unterhalb des Zielpunkts den Wert z^5, und alle verfügbaren Plätze darunter insgesamt den Wert

$$z^5 + z^6 + z^7 + \cdots = z^5 \sum_{k=0}^{\infty} z^k = z^5 \frac{1}{1-z} = \frac{z^5}{1-z},$$

wobei die Formel für die geometrische Reihe benutzt wurde. Die beiden links und rechts benachbarten Spalten haben entsprechend jeweils den Gesamtwert

$$\frac{z^6}{1-z},$$

die übernächsten Spalten jeweils

$$\frac{z^7}{1-z}$$

und so weiter. Der Gesamtwert der unteren Halbebene ergibt sich somit aus einer weiteren geometrischen Reihe, nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{z^5}{1-z} + \frac{2}{1-z}(z^6 + z^7 + \cdots) &= \frac{z^5}{1-z} + \frac{2z^6}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \\
&= \frac{z^5}{1-z} + \frac{2z^6}{1-z} \frac{1}{1-z} \\
&= \frac{z^5}{1-z} + \frac{2z^6}{(1-z)^2} \\
&= \frac{z^5(1-z) + 2z^6}{(1-z)^2} \\
&= \frac{z^5 + z^6}{(1-z)^2} \\
&= z^5 \frac{1+z}{(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

Wir hatten z so gewählt, dass $1 - z = z^2$ gilt, und daher folgt

$$z^5 \frac{1+z}{(1-z)^2} = z^5 \frac{1+z}{z^4} = z(1+z) = z + z^2 = 1.$$

Es müssten also sämtliche Felder in der unteren Halbebene besetzt sein, um eine Anfangsstellung vom Gesamtwert 1 zu erreichen. Dann bräuchte man aber immer noch unendlich viele Züge, um zu $y = 5$ zu gelangen. Somit haben wir die Behauptung bewiesen.