

# Funktionalgleichungen

Thomas Peters  
Thomas' Mathe-Seiten  
[www.mathe-seiten.de](http://www.mathe-seiten.de)

10. Mai 2010

Funktionalgleichungen sind Gleichungen, mit denen Funktionen charakterisiert oder bestimmt werden können. In diesem Artikel betrachten wir einige Beispiele für Funktionalgleichungen und sehen, wie lineare Funktionen, Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen durch Funktionalgleichungen beschrieben werden.

## Die Cauchy'sche Funktionalgleichung

Eine der einfachsten Funktionalgleichungen ist die Cauchy'sche Funktionalgleichung. Gesucht sind alle Funktionen  $f$ , die die Beziehung

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  erfüllen. Wir werden nun sehen, dass diese Bedingung die möglichen Funktionen  $f$  bereits vollständig bestimmt. Zunächst setzen wir einige spezielle Werte für  $x$  und  $y$  ein. Im Fall  $x = y = 0$  folgt  $f(0) = 2f(0)$ , was nur dann gelten kann, wenn  $f(0) = 0$  ist. Für  $y = -x$  ergibt sich damit

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x),$$

also  $f(-x) = -f(x)$ . Damit wissen wir bereits, dass die Funktionen  $f$  ungerade sein müssen.

Für  $y = x$  erhalten wir

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

Damit folgt für  $y = 2x$  sogleich

$$f(3x) = f(x + 2x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x).$$

Hier kann man ein allgemeines Muster erkennen, und in der Tat können wir durch vollständige Induktion zeigen, dass  $f(nx) = nf(x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Den Induktionsanfang haben wir oben schon gezeigt. Nun gelte für ein beliebiges  $n$  die Induktionsvoraussetzung, dann folgt

$$f((n + 1)x) = f(x + nx) = f(x) + f(nx) = f(x) + nf(x) = (n + 1)f(x).$$

Wegen

$$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$$

gilt die Formel  $f(nx) = nf(x)$  sogar für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

Nun betrachten wir speziell  $x = 1/n$  und erhalten

$$f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

also  $f(1/n) = f(1)/n$  und für beliebiges  $m \in \mathbb{Z}$  weiter

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1).$$

Damit ist die Beziehung  $f(r) = rf(1)$  für beliebige rationale  $r \in \mathbb{Q}$  gezeigt. Unter der Voraussetzung, dass die Funktion  $f$  stetig ist<sup>1</sup>, können wir diese Beziehung auf beliebige reelle Zahlen ausdehnen. Für eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  existiert nämlich eine Folge  $r_n$  mit  $r_n \in \mathbb{Q}$  und  $\lim_n r_n = x$ . Da  $f$  stetig ist, folgt

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(1) = x f(1).$$

Damit ist die Funktion  $f$  vollständig durch ihren Funktionswert  $f(1)$  festgelegt. Nennen wir diese Konstante  $c$ , so sind also alle stetigen Lösungen der Cauchy'schen Funktionalgleichung von der Form  $f(x) = cx$ . Die Lösungen sind gerade die linearen Funktionen! Eingesetzt in die Funktionalgleichung erhält man die einfache Formel

$$c(x + y) = cx + cy.$$

## Eine leichte Variation

Was ändert sich, wenn man eine Variation der Cauchy'schen Funktionalgleichung betrachtet, bei der die Addition durch eine Multiplikation ersetzt wird? Wir suchen jetzt also Lösungen der Gleichung

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Wir tasten uns zunächst wieder langsam vor und rechnen mit  $x = y = 1$  sogleich  $f(1) = f(1)^2$ . Diese Gleichung hat die zwei Lösungen  $f(1) = 0$  und  $f(1) = 1$ . Im ersten Fall ist

$$f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0,$$

die Funktion verschwindet also identisch. Wesentlich interessanter ist der zweite Fall,  $f(1) = 1$ . Für  $x > 0$  ist zunächst

$$f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = f(\sqrt{x}) \cdot f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0.$$

Tatsächlich wird der Wert  $f(x) = 0$  nie angenommen. Denn nehmen wir an, es gäbe ein  $x$  mit  $f(x) = 0$ , dann folgt unmittelbar

$$1 = f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

ein Widerspruch.

Da die Funktion  $f$  also für alle positiven  $x$  positiv ist, können wir die Hilfsfunktion  $g(z) = \ln(f(\exp(z)))$  definieren. Für diese Funktion  $g$  gilt

$$\begin{aligned} g(z + w) &= \ln(f(\exp(z + w))) = \ln(f(\exp(z) \cdot \exp(w))) = \ln(f(\exp(z)) \cdot f(\exp(w))) \\ &= \ln(f(\exp(z))) + \ln(f(\exp(w))) = g(z) + g(w) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Es gibt auch unstetige Lösungen der Cauchy'schen Funktionalgleichung, welche wir hier aber nicht betrachten werden.

und damit die Cauchy'sche Funktionalgleichung! Damit wissen wir aber, dass  $g$  von der Form  $g(z) = cz$  ist. Folglich ist

$$f(\exp(z)) = \exp(g(z)) = \exp(cz) = \exp(z)^c,$$

und somit folgt für  $x = \exp(z)$  direkt  $f(x) = x^c$ . Die Lösungen der multiplikativen Funktionalgleichung sind also die Potenzfunktionen! Die Funktionalgleichung entspricht der bekannten Rechenregel

$$(x \cdot y)^c = x^c \cdot y^c.$$

Es sind noch mehr Variationen der Cauchy'schen Funktionalgleichung denkbar. So kann man die gemischten Varianten  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  und  $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$  betrachten. Dies sind gerade die Funktionalgleichungen der Exponentialfunktionen und der Logarithmusfunktionen. Da diese beiden Funktionen gerade Umkehrfunktionen voneinander sind, folgen die Funktionalgleichungen direkt auseinander. Die Exponentialfunktionen werden häufig auch über eine Differentialgleichung charakterisiert. Wir werden daher zunächst betrachten, wie diese beiden Charakterisierungen miteinander zusammenhängen.

## Die Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind bekannt als Lösungen von Differentialgleichungen der Form  $f'(x) = kf(x)$ . Wir zeigen nun, wie sich aus dieser Differentialgleichung die Funktionalgleichung der Exponentialfunktionen ergibt.

Wir betrachten zunächst das spezielle Anfangswertproblem  $f'(x) = f(x)$  mit  $f(0) = 1$ . Für die Hilfsfunktion  $h(x) = f(x)f(-x)$  gilt

$$h'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0,$$

also ist  $h$  konstant. Wegen  $h(0) = f(0)f(-0) = 1$  ist  $h(x) = 1$  für alle  $x$  und somit  $f(x)f(-x) = 1$ . Insbesondere verschwindet  $f(x)$  niemals, und wir können  $f(-x) = 1/f(x)$  schreiben.

Ist  $g$  nun eine weitere Lösung der Differentialgleichung  $g'(x) = g(x)$ , so können wir die Hilfsfunktion  $h(x) = g(x)/f(x)$  betrachten und rechnen

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f(x)^2} = 0.$$

Die Hilfsfunktion  $h$  ist wieder konstant, also ist  $g = cf$  mit einer Konstanten  $c$ . Alle Lösungen der Differentialgleichung sind also Vielfache der speziellen Lösung  $f$ . Wir schreiben statt  $f$  von nun an  $\exp$  für die natürliche Exponentialfunktion.

Jetzt können wir für  $\exp$  bereits die Funktionalgleichung  $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$  beweisen. Für  $g(x) = \exp(a+x)$  gilt nämlich  $g'(x) = \exp(a+x) = g(x)$ , es muss also  $\exp(a+x) = c\exp(x)$  sein. Setzt man hier speziell  $x = 0$  ein, so erhält man wegen  $\exp(0) = 1$  die Konstante  $c = \exp(a)$ . Folglich ist  $\exp(a+b) = c\exp(b) = \exp(a)\exp(b)$ .

Bekanntlich definiert man beliebige Exponentialfunktionen mit Hilfe der natürlichen Exponentialfunktion über die Beziehung  $a^x = \exp(x \ln a)$ . Diese Funktion  $f(x) = a^x$  erfüllt dann die allgemeinere Differentialgleichung

$$f'(x) = \ln a \exp(x \ln a) = \ln a f(x)$$

und die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = \exp((x+y) \ln a) = \exp(x \ln a + y \ln a) = \exp(x \ln a) \cdot \exp(y \ln a) = f(x) \cdot f(y).$$

Diese Funktionalgleichung ist natürlich nichts anderes als das bekannte Potenzgesetz

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

## Die Logarithmusfunktionen

Die Funktionalgleichung des Logarithmus ergibt sich unmittelbar aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Es sei  $f$  eine Exponentialfunktion, also  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ , dann gilt für die Logarithmusfunktion  $f^{-1}$  die Beziehung

$$f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)) \cdot f(f^{-1}(y)) = x \cdot y$$

und nach Anwendung von  $f^{-1}$  auf beiden Seiten

$$f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(x \cdot y).$$

Dies ist bereits die gesuchte Funktionalgleichung, welche üblicherweise in der Gestalt

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

geschrieben wird.