Das Buffon’sche Nadelexperiment

Thomas Peters
Thomas’ Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

1. September 2004

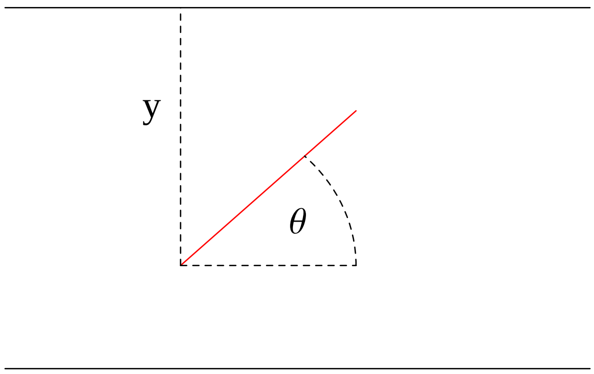

Abbildung 1.1: Beschreibung der Endlage durch zwei Parameter.

Eine numerische Bestimmung der Kreiszahl π erfolgt meist durch das Aufstellen von Formeln aufgrund geometrischer Zusammenhänge und anschließende Auswertung durch die Berechnung von möglichst vielen Gliedern der Reihenentwicklung dieser Formeln. Ein ganz anderes Verfahren liefert das *Buffon'sche Nadelexperiment*, bei dem π auf stochastischem Wege bestimmt wird. Natürlich ist dieses Verfahren wenig praktikabel (obwohl bekannt ist, dass einige Menschen dieses Experiment einige Tausend mal durchgeführt haben), aber mathematisch sehr interessant.

Die Idee

Wir betrachten eine Ebene, die von Geraden in gleichem Abstand d durchzogen ist. Auf diese Ebene werfen wir eine Nadel der Länge l. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine Gerade schneidet?

Offensichtlich gibt es zwei Fälle, die man unterscheiden muss. Einmal kann die Länge der Nadel kleiner als der Abstand der Geraden sein ($l < d$), oder sie kann größer sein ($l > d$). Der Fall $l = d$ ergibt sich als Spezialfall aus beiden Betrachtungsweisen und muss deshalb nicht explizit untersucht werden.

Zunächst einmal haben wir keine Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit auszurechnen. Dazu fehlt uns das Wissen über die Art, wie die Nadel auf die Ebene geworfen wird. Betrachten wir einmal die Lage der Nadel auf der Ebene wie in Abbildung 1.1 gezeigt.

Wir benötigen nun geeignete Parameter, um die Lage der Nadel (rot) mathematisch erfassen zu können. Als einen Parameter wählen wir den *Abstand* y zwischen dem unteren Ende der Nadel und der nächst höheren Geraden[1]. Die horizontale Position ist unwichtig, da sie keinen Einfluss darauf hat, ob die Nadel eine Gerade schneidet oder nicht. Ein weiterer Parameter ergibt sich als Winkel θ, der die *Orientierung* der Nadel angibt. Dadurch ist die Lage der Nadel zwischen den Geraden eindeutig festgelegt.

Der Parameter y reicht logischerweise von 0 bis l, wogegen θ von 0 bis π reicht[2]. Weiterhin

[1] Falls die Nadel exakt horizontal fällt, gibt es kein unteres Ende. Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung aber *stetig* sein soll, ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses Null!

[2] Wäre θ größer als π, so hätten wir das falsche Ende der Nadel als das untere betrachtet!

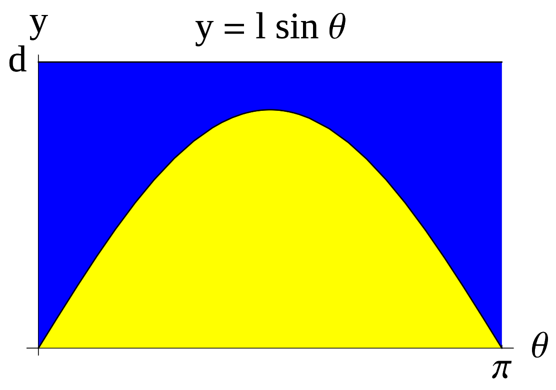

Abbildung 1.2: Die θ-y-Ebene.

nehmen wir an, dass innerhalb des Wertebereichs der Parameter jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist. Außerdem sollen beide Parameter unabhängig voneinander sein, d.h. sie sollen sich nicht gegenseitig beeinflussen. Ist dies der Fall, so ist jedes Paar (θ, y) als Ergebnis gleich wahrscheinlich.

Der Fall $l < d$

In der θ-y-Ebene (siehe Abbildung 1.2) bilden alle möglichen Ergebnisse ein Rechteck der Länge π und Breite d. Das obere Ende der Nadel ist $l \cdot \sin\theta$ oberhalb des unteren Endes. Die Nadel schneidet die Gerade genau dann, wenn $l \cdot \sin\theta$ größer als y ist. Oder, anders ausgedrückt, wenn der Punkt (θ, y) unterhalb der Kurve $l \cdot \sin\theta$ liegt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nadel die Gerade schneidet, ergibt sich nun als Quotient aus der Fläche unter der Sinuskurve und der Fläche des gesamten Rechtecks. Man erhält

$$p = \frac{1}{\pi d} \int\limits_0^\pi l \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{2l}{\pi d}.$$

Doch wie kann man damit π bestimmen? Nun, man könnte dieses Experiment sehr oft durchführen und die relative Häufigkeit des Treffens einer Geraden gleichsetzen mit der Wahrscheinlichkeit. Löst man diese Formel nach π auf, so erhält man einen Näherungswert für π! Allerdings muss man sehr lange werfen, um etwas Brauchbares zu erhalten. . .

Der Fall $l > d$

Jetzt ist die Sache schwieriger. Ist $l > d$, so geht nämlich die Sinuskurve in obigem Diagramm über das Rechteck mit den möglichen Werten hinaus. Folglich dürfen wir nicht mehr einfach die Sinusfunktion integrieren. Wir müssen vielmehr die Werte berücksichtigen, die sowohl unter der Sinuskurve als auch im Rechteck liegen.

Dazu berechnen wir zunächst den ersten Schnittpunkt zwischen Sinuskurve und Rechteck

$$l \sin \theta_1 = d \Rightarrow \theta_1 = \arcsin\left(\frac{d}{l}\right).$$

Aufgrund der Symmetrie der Sinuskurve erhalten wir

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{\pi d}\left(2\int_0^{\theta_1} l \sin\theta \,\mathrm{d}\theta + (\pi - 2\theta_1)\cdot d\right) \\
&= \frac{1}{\pi d}\left(2\Big(-l\cos\theta\Big)_0^{\arcsin d/l} + \Big(\pi - 2\arcsin\frac{d}{l}\Big)\cdot d\right) \\
&= \frac{1}{\pi d}\left(2l\Big(-\sqrt{1-\frac{d^2}{l^2}}+1\Big) + \Big(\pi - 2\arcsin\frac{d}{l}\Big)\cdot d\right) \\
&= \frac{1}{\pi d}\left(2l\Big(1-\sqrt{1-\frac{d^2}{l^2}}\Big) + \Big(\pi - 2\arcsin\frac{d}{l}\Big)\cdot d\right).
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich der erste Summand als die Flächen unter der Sinuskurve bis zu den Schnittpunkten mit dem Rechteck, und der zweite Summand ist das Rechteck in der Mitte.